8. Jahrgang · März 1993

B 7734 E

Grund-
Schulmagazin

Thema

Alexander von Schwerin

Fehlertypen und ihre Charakteristika

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist: Der größte Teil aller – auch noch so irrational erscheinenden – Fehler eines Grundschülers in Mathematik gehorcht einer (wenn auch subjektiven) Logik. Gemeint ist: Weil den Kindern die »objektive« *Logik* abhanden gekommen ist oder nie zugänglich war, sie aber andrerseits wissen, daß pure Zufälligkeit und Vielfalt der Einfälle – zumindest als Programm – nicht gefragt ist, versuchen sie in ihrem und mitsamt ihrem gesammelten Unwissen eine – wenigstens für sie einleuchtende – Regel in diese ihnen fremde Welt zu bringen. Mit anderen Worten: Rechenschwache Schüler *denken*. Darin liegt demnach keinerlei Unterschied zu den erfolgreicheren Schülern. Also läßt sich die Frage nach der Art ihres Denkens, ihrer *Regelerstellung* stellen, um durch die Ermittlung dieser subjektiven Algorithmen Aufschluß zu gewinnen über:

- Wie funktioniert der jeweilige kindliche Verstand im Umgang mit seinen bemerkten, aber nicht gewußten Defiziten?
- Welches Gebiet der Grundschulmathematik wurde wie, d.h. mit welchen Schemata, Eselsbrücken, vermeintlichen Plausibilitäten mit dem eigenen Anspruch an »Zwangsläufigkeit« auf »die Reihe gebracht«?

In diesem Umstand liegt unseres Erachtens die einzige wirklich sinnvolle Möglichkeit, Defizite fundamental anzugehen, d.h. neu aufzubauen, statt mittels einer Ausdehnung des Paukprogramms über das Schulpensum nebst Hausaufgabenvolumen hinaus zum dauernden Nachhilfewesen aufzublähen und damit das betroffene Kind an den Rand seiner Willenskraft zu drängen, ohne ihm gleichzeitig die Chance zu eröffnen, *analytischen Zugriff* zu nehmen auf das, was es übt und gleichzeitig nicht richtig versteht.

Allein die Möglichkeit, Rechenfehler in hohem Grade typologisieren zu können, sollte vor einer vorschnellen Einordnung des Nicht-Rechnen-Könnens als quasi-naturhaftes Defizit (Begabung, Veranlagung etc.) warnen. Als Nährboden für solche – nachvollziehbaren – Fehler bieten sich wenigstens ebenso an: das Lernumfeld, mißverständliche Vermittlung, zweifelhafte Lerninhalte, in die Irre führende Veranschaulichungsversuche aufgrund einer falsch verstandenen Kindgerechtheit sowie das anschaulich-konkrete Denken eines Kindes selbst, das abstraktes Denken ja erst im Begriffe ist zu lernen, oder Umgangsweisen mit Lerninhalten, die sich aus psychischen Folgen des bisherigen Mißerfolgs ergeben.

Die folgende Auswahl an *Typen von Fehlern* kann zu einer Schärfung des Blicks für solche Probleme vielleicht etwas beitragen. Eine direkte diagnostische Umsetzung ist allerdings oft nicht möglich, da die angeführten Fehler zumeist in einer Gemengelage auftreten, also auf den ersten Blick unkenntlich sind. Der hier gewählte Schwerpunkt läßt sich davon leiten, welche Schwierigkeiten der kindliche Verstand im Umgang mit den Grundrechenarten haben kann. Es entfällt deshalb eine Gliederung der Fehler nach Stoffplänen. Ausgelassen wurden auch alle formalisierbaren Fehler, die sich v.a. bei den schriftlichen Rechenarten klassenmäßig statistisch erfassen lassen.

Sortieren und vergleichen

Allem Rechnen vorgelagert als Voraussetzung ist, daß die Kinder eine gewisse Sicherheit aufweisen in der Feststellung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden bei Gegenständen einer bestimmten Qualität. Zwischen Ober- und Unterbegriffen zu wechseln, überhaupt Gegenstände nach gesetzen Merkmalen sortieren und vergleichen zu können, ist unabdingbar für die Durchdringung von Sachaufgaben. Notwendig dafür ist, daß ein Kind sich von seinem unmittelbaren Verhältnis zu den Dingen lösen und diese für sich selbst betrachten kann.

- Aufgabe: Die Pappgegenstände des Spiels »Blinde Kuh« zu Gruppen von Dingen mit gemeinsamen Eigenschaften sortieren. Antwort: Lastwagen, Baum, Hand, Säge, Leiter. Was ist gemeint: »Ich steige auf die Leiter, säge mit meiner Hand einen Ast ab und fahre ihn mit dem Lastwagen weg.« (Dieses Kind ist im oben genannten Sinne befangen. Es denkt in funktionellen Zusammenhängen, in phantasievollen Bildern, nicht in Ober- bzw. Unterbegriffen).
- Oder: In der Gruppe »Fortbewegungsmittel« finden sich richtig: Schiff, Lkw, Pkw, Flugzeug und falsch: Lenkrad. (Verschwommen ist der Unterschied zwischen dem Fortbewegungsmittel selbst und einem funktionellen Teil desselben).
- Oder: 4 Flugzeuge und 3 Schiffe sind 7 Flugzeuge. Bei Kontrollfrage »4 Schiffe und 3 Flugzeuge?« kommt folgerichtig die Antwort: 7 Schiffe. Die Einheit ist nicht der beide zusammenfassende Begriff, sondern die größere Fraktion bestimmt die Endung.

Zahlbegriff

1) Zahlen werden als eigenständige Existenzen begriffen, die in keinem Zusammenhang untereinander stehen, womöglich gekoppelt an die Gestalt ihres Symbols.

- Aus einer als Würfelturm dargestellten Fünf soll eine Vier werden. Das Kind baut die Fünf ganz ab und die Vier neu auf. (Es hat nicht begriffen, daß sich jede Zahl aus aliquoten Teilen, nämlich aus einer unterschiedlichen Ansammlung von Einsern, zusammensetzt).

2) Weil die Aufgabe 3+4 (mit Steckwürfeln darzustellen) im Sinne funktionellen Tuns verstanden wird (wie Legohaus bauen), ist sie vergessen, sobald sie erledigt ist. Weder bestehen die beteiligten Summanden in der neuen Zahl fort, noch handelt es sich gar um ein von dieser einmaligen Handlung unabhängiges immerwährendes quantitatives Verhältnis.

3) Das Abzählen wie auch das Rechnen mit Fingern ist bleibende Notwendigkeit für alle Operationen, wobei ein falscher Zahlbegriff, der Ordinalaspekt der Zahl, zugrunde liegt.

- Aufgabe: 4+3 =»6« oder »7«. (Die Vier wird identisch gesetzt mit der Position des 4. Fingers. Daraus ergibt sich a) ein Anschlußproblem für den zweiten Summanden: Ist der 1. Posten des 2. Summanden ein neuer Finger oder der letzte des 1.Summanden, also der 4. Finger selbst?
b) Auch bei richtiger Aneinanderreihung der abzählenden Finger sieht sich das Kind gezwungen, das Resultat noch einmal ganz von unten zählend zu erfassen, also noch einmal von vorn loszuzählen, wieviel jetzt eigentlich erreicht wurde.
Die Verknüpfung der beiden Quantitäten gelingt nicht).

● Daß 9-4=6 ist, kann ein mit dem Ordnungsaspekt operierendes Kind leicht beweisen: Der 9., der 8., der 7., der 6. Finger. Auf die Gegenpropaganda des genervt mitübenden Vaters, es sei 5, zimmert sich das Kind eine unschlagbare Eselsbrücke zum »Erfolg«: »Also muß ich immer das Nächste sagen von dem, was ich gezählt habe.« Aus gänzlich falschen Gründen werden ab jetzt richtige Ergebnisse produziert.
● Ebenso kann die Frage »Was ist größer? 12 oder 9?« formell richtig beantwortet werden. Aber warum? Weil die »12 weiter hinten kommt« (Hierarchie der Zahlennamen statt Größe), oder: »Sabine wohnt Hausnummer 12 in der Straße und das ist weiter hinten als da, wo wir wohnen«.
● 4+1 = 6: Den 1. Summanden illustriert die linke Hand, den 2. Summanden die rechte Hand. Dummerweise symbolisiert ansonsten der Daumen der rechten Hand die Sechs. Der Weg und das Ziel werden hier verwechselt.

4) Die gefragte Rechenart soll aus den für sie zu verwendenden Zahlen selbst erschlossen werden.
● Die Zahlen 8 und 3 in einer Aufgabe laden zu minus ein, weil sie als Zahlenreihe »nach unten deuten«, und »minus macht weniger«. Da oftmals bei in der Schule einzuübenden Rechenoperationen bestimmtes dafür geeignetes Zahlenmaterial verwendet wird, kann dieser Umkehrschluß sogar eine bedingte Trefferquote erzielen.

Stellenwertsystem

Das Stellenwertsystem ist ein Ordnungssystem der anwachsenden Zahlen. Die Zuordnung eines jeweils eindeutigen neuen Symbols und Namens zu einem quantitativen Sachverhalt ist nicht praktikabel. Es braucht also eine (beliebige) Systematik, die die Darstellung des Anwachsens der Quantitäten ermöglicht, indem sie auf sich wiederholende, bekannte Symbole zurückgreift. Die Schwierigkeit für rechenschwache Kinder besteht nun oftmals darin, daß sie sich im Bemühen um Verständnis auf eine der beiden Seiten schlagen, d.h. entweder, sie sehen nur den quantitativen Aspekt; dann verstehen sie nicht die Analogie in der Ausdrucksweise zu den - bekannten - Zahlen 1 bis 9. Oder und häufiger: Sie halten alles für eine sprachlich anders klingende Wiederholung ihrer 10 Finger, eben diesmal teilweise mit -zig gesprochen. Dem leistet die Schule Vorschub durch die Einführung der Zahlen bis Hundert als Zehner-Reihe (10, 20, 30). Zwar wird über Bündelung der quantitative Unterschied behandelt, aber eben nur methodisch. 57 sagt ihnen quantitativ nichts. 88 halten sie für zweimal den Achter, manchmal zusammengereimt als 8+8, 8x8, 2x8 usw. Was nun beide verbindet, wie man sie auflöst, bleibt so verschlossen.

1) Ab Zehn kann nicht mehr gerechnet werden, weil »es nicht geht«. Mit dem Vorrat an Fingern ist auch die Möglichkeit, Zahlen quantitativ zu erfassen, erschöpft. Diese Kinder sind beim Rechnen mitunter barfuß anzutreffen.

2) Verwechslung von sprachlicher Norm und möglicher Bedeutung: 13 und 30; »dreizehn« begrifflich gedacht als drei Zehner.
● Inhaltliche Identität zweier umgangssprachlicher Ausdrucksweisen werden als Unterschied zurechtgemacht: »Nach hundert kommt einhundert.«

3) »83 oder 38?« Zahlendreher auf Grund von Asynchronisation von Hören und Schreiben kombiniert mit dem Fehlen eines quantitativen Vorstellungsvermögens: Die primäre Eigenschaft einer Zahl ist nicht ihre Größe, weil diese dem Schüler eh nichts sagt, sondern deren gehörte Zusammensetzung aus zwei Zahlen.

4) Die Schreibweise einer Zahl mittels zweier Ziffern wird verwechselt mit zwei Zahlen, wovon beide gebührend behandelt gehören:
● »23 ist eine Zahl der 3er-Reihe, weil man es doch sieht« (Die verschiedenen Ziffern einer Zahl werden von vornherein für sich als Zahlen gesehen und behandelt, der Gesichtspunkt, die Gesamtzahl zu erfassen, wird nicht eingenommen).
● Wenn es etwas mit den Zahlen zu tun gilt: 13+20=51 (innen wird mit innen, außen mit außen addiert); 13+20= 6 (alle Ziffern werden als Zahlen zusammenaddiert).
● 72<69, weil 69 eine 9 hat.

5) Klappfehler:
● 147-49 = 102 (Die Hundert kommt erst mal auf die Seite, weil man sie für die 2. Zahl nicht braucht. Dann macht man 40-40 = 0 und 7-9? »Das geht ja gar nicht«, also muß man wohl 9-7 rechnen, ist 2, also 102. Der Hunderter, einmal auf die Seite gestellt, ist von der Einer-Stelle her für den Schüler nicht mehr angreifbar; also werden die Rechenregeln passend zur verfahrenen Lage abgewandelt).

6) Richtungsstörungen im Ziffernumgang:
● 57 - 5 = 70; 50+7 = 67. »Da muß ich über den Zehner.«

7) Auf Grund der Unkenntnis des Zusammenhangs von Quantität und der ihr entsprechenden Schreibweise von mit Ziffern besetzten Stellenwerten dominiert die lauttreue Schreibweise:
● 8841000 lautet die schriftliche Niederlegung der Zahl 884 000, oder 3100 sieht geschrieben so aus: 3000100 (aus dem akustischen Klang werden die bekannten Wortteile als eigene Zahlen herausgehört und nicht als Teile einer Zahl. Daß dabei mehrere gleichlautende Stellen, z.B. zwei Zehnerstellen, gleichzeitig existieren, fällt nicht weiter auf).

8) Die geschriebene Zahl wird, durch das visuelle Bild mit Leseabstand oder Lesepunkt unterstützt, gedanklich in ihre Bestandteile zerlegt und diese selbst individuell behandelt:
● Der Nachfolger von 89 001 ist 90 002 bzw. dann weiter 91 003.

Addition

Das Praktizieren des additiven Kopfrechnens ohne ausreichend begriffene und routinierte Grundlage führt zu abenteuerlichen Wegen von Auswendiglernen in Kombination mit Fingertechniken, von quantitativen Bezügen völlig freigesetzt.
● Beim Kopfrechnen werden die Übergänge durch Abzählen umgangen.
● Zerlegen läuft zu langsam und der Art nach unökonomisch.
● Die Aufmerksamkeit wird auf die Stellen ungleichmäßig verteilt.
● Durch schriftliches Addieren werden noch die größten Mengen mit den Zahlen eins bis neun zählend bewältigt. Zehner- und Hunderter-Übergänge erledigen sich durch »eins im Sinn«.

Deshalb wird es gerne zur Vermeidung von Kopfrechnen, also dem wirklichen Umgang mit Quantitäten, eingeschlagen. Gibt es kein Papier, stellt das Kind sich das schriftliche Verfahren eben im Kopf vor (was Konzentration erfordert und Fehlerquelle ist).

● 17 + 18 = 89, 17 + 18 = 98. (Die Ziffern der jeweiligen Zahlen selbst werden zusammengezählt oder links mit rechts oder innen mit innen und außen mit außen usw. Eine Selbstkontrolle per Überschlag geht dabei aufgrund mangelnder Quantitätsvorstellung von vornherein nicht.)

● 70 + 70 = 400, weil 7+7 ja auch 14 ist. Wenn 2+5 = 7 ist, dann ist 25 + 5 =70 (Versuch der puren Analogie zum Zahlenraum bis 20).

● 60 + 60 = 20, »weil 12 Zehner kann ich ja nicht schreiben« (mangelndes Verständnis des Stellenwertsystems: Es ist unklar, daß 12 Zehner auch als ein Hunderter und zwei Zehner darstellbar sind); ähnlich: 28 + 35 = 603 (8+5=13, 2+3=5,+1 im Sinn =6, aber weil »-zig« also 603).

Multiplikation

Die Multiplikation wird als eine unter eben verschiedenen Rechenarten verstanden, ohne daß sie begrifflich eingeordnet werden kann. Der Formalismus des schriftlichen Multiplizierens wird nicht als abgeleitet von den Gesetzen der Multiplikation verstanden, sondern das Schema selbst gilt als das Wesentliche.

● 4+4 = 4x4 (Das Einmaleins wurde in seiner Eigenart, in seinem Verhältnis von Addition und Multiplikation nicht erfaßt.)

● 4x8 =»48« (Ineinssetzung von Malnehmen mit Stellenwertschreibweise).

● 6x7 = ?: »1x7 = 7, 2x7 = 14, 3x7 = 21...« (Das Einmaleins wurde als leere Reihe ohne quantitativen Bezug gelernt und muß demnach als Reihe von unten wie ein Gedicht aufgesagt werden.)

● 6x7 = »7+7+7+7+7+7« (Das Einmaleins wird als Plus umgangen.)

● 4x7 = 1x7+2x7+3x7... (Bei Aufzählung der Reihe werden gleichzeitig die einzelnen Posten addiert.)

● 3x8 = 24, aber 6x4 wird nicht gewußt (Die Verbindung der Einmaleinsreihen untereinander wird nicht erkannt.)

● 48 = ?x4 (mit 10mal ...bricht die Reihe ab).

● 13x14 = »112«; 13x14 = »43« (Das schriftliche Einmaleins wird mit falscher und grundloser Systematik praktiziert. »Links mit links und rechts mit rechts« oder »innen mit innen und außen mit außen« usw.)

● 6x8 =48, also ist 60x8=148. Weil man an die 6 noch eine Null dranhängt, wird diese dann beim Malnehmen zu Hundert. Ähnlich: »48 und 480, was ist der Unterschied?« »Die Zehn« (statt mal Zehn) oder: Eine Schraube ist 9mm lang. Wie lange ist eine 10fache: Antwort: »19mm«.

● Zur Frage nach gerader und ungerader Zahl: »54 ist ungerade, weil die fünf nicht durch 2 geht«. (Die 2 Ziffern werden wie 2 Zahlen behandelt.)

● 7x0 = »7« (Verwechslung mit der Addition führt zum Schema: Immer wenn die Null auftaucht, ist das Ergebnis die andere Zahl.)

Subtraktion

● Wegen des Ordinalaspekts wissen die Kinder nicht, wo sie zu zählen anzufangen und was sie als Ergebnis zu verkünden haben. 7-3 = »3«: Man legt den Finger auf ein 7. Klötzchen, schaut die dahinterliegenden an und geht dabei drei zurück. (Vorstellung der Zahl als Reihenfolge statt Menge; es wird der richtige Startplatz zum Abzählen gesucht.)

● 25-17= »12« (Ziffern werden als Zahlen behandelt und die Operation der jeweiligen Größe der einzelnen als Zahlen verstandenen Ziffern angepaßt).

● Das Wort »ausgeben« in einer Sachaufgabe ist »minus« (es wird automatisch der Standpunkt des Geldbesitzers eingenommen).

● 1200-800=1000-200-800 = »0« (Klappfehler wg. Ähnlichkeit mit Ergänzen).

● Schriftliche Subtraktion: Der Übertrag, weil ja »minus« angesagt ist, wird auch abgezogen.

● 92-28=»76« (Bestimmen der Differenz zwischen den Ziffern gleichen Stellenwerts, also Fehler durch falsche Rechenrichtung mit erschlichenem Vorteil, daß jeder Zehnerübergang vermieden ist).

● 80-21=»60« (»Multiplikativer« Gebrauch der Null, Subtraktion von der Null ist für viele Schüler nicht lösbar.)

Division

● »Die kleinere ist die Hälfte«, z. B. 7:2=»2« (Plausibel: Das Ergebnis muß ja schließlich kleiner werden, die linke Hand mit den fünf Fingern kommt weg.)

● Größenabschätzung im Rahmen ihrer Durchführung (Überschlag): 54 000: 2000=52 000 »...weil weniger sein muß, und die Hälfte von vier zwei ist und da geht genauso gut minus.«

● 54:2=810 (Ziffern werden als Zahl behandelt; Richtungswechsel; Fehler im Umgang mit den Stellenwerten, keinerlei Größenvorstellung als Mittel der Selbstkontrolle).

● 100:4=25, »also ist 1000:4=50« (Verwechslung von Faktor 10 mit Verdoppelung).

● 128:4=38, weil »120 durch 4 ist 30, also 38, sonst bleibt die 8 übrig,« 56:4=26, weil 40:4=10, Rest 16, also 26 (Addition des Quotienten mit dem ungeteilten Rest).

Um all diese möglichen Mißverständnisse aufzudecken und in einen – den sinnvollen Neuaufbau ermöglichenden – Zusammenhang zu bringen, bedarf es qualitativer Tests, die ein individuelles Fehlerprofil zu erstellen in der Lage sind.

Verfasser:

Alexander v. Schwerin
Institut zur Behandlung der Rechenschwäche
Brienner Straße 48
80333 München
Telefon 089/5233142
Telefax 089/5234283